

Au fond, c'est quoi un langage de programmation ?

Yann Orlarey

JIM 2015
Montréal 7–9 mai 2015



Langages musicaux

Exemples de langages et de formalismes utilisés en musique



- 4CED
- abc
- Adagio
- AML
- AMPLE
- Arctic
- Autoklang
- Bang
- Canon
- CHANT
- Chuck
- CLCE
- CMIX
- Cmusic
- CMUSIC
- Common Lisp Music
- Common Music Notation
- Csound
- CyberBand
- DARMS
- DCOMP
- DMIX
- Elogy
- EsAC
- Euterpea
- Extempore
- Faust
- Flavors Band
- Fluxus
- FOIL
- FORMES
- FORMULA
- Fugue
- Gibber
- GROOVE
- GUIDO
- HARP
- Haskore
- HMSL
- INV
- invokator
- KERN
- Keynote
- Kronos
- Kyma
- LOCO
- LPC
- Mars
- MUSIC
- Max
- MidiLisp
- MidiLogo
- MODE
- MOM
- Moxc
- MSX
- MUS10
- MUS8
- MUSCOMP
- MuseData
- MusES
- MUSIC 21
- MUSIC 10
- MUSIC 11
- MUSIC 360
- MUSIC 4B
- MUSIC 4BF
- MUSIC 4F
- MUSIC V
- MUSIC 6
- MCL
- MUSIC III/IV/V
- MusicLogo
- Music1000
- MUSIC7
- Musictex
- MUSIGOL
- MusicXML
- Musixtex
- NIFF
- NOTELIST
- Nyquist
- OPAL
- OpenMusic
- Organum1
- Outperform
- Overtone
- PE
- Patchwork
- PILE
- Pla
- PLACOMP
- PLAY1
- PLAY2
- PMX
- POCO
- POD6
- POD7
- PROD
- Puredata
- PWGL
- Pyo
- Ravel
- SALIERI
- SCORE
- ScoreFile
- SCRIPT
- SIREN
- SMDL
- SMOKE
- SSP
- SSSP
- ST
- Supercollider
- Symbolic Composer
- Tidal

Au fond, c'est quoi un langage de programmation ?



Pour répondre à cette question, l'idée c'est d'enlever tout ce qui est superflu et de voir ce qui reste, les notions vraiment primitives. Par exemple : est-ce que on a besoin des nombres pour faire un langage de programmation ?

Pour cela on va voir trois formalismes de radicalité croissante :

- Les systèmes de réécriture
- Le lambda-calcul
- La logique combinatoire

Systemes de Réécriture

Un *système de réécriture* (Axel Thue, 1914) est une façon de décrire des transformations à partir de simples règles de remplacement, appelées *règles de réécriture*.

Exemple :

On a une situation de départ, ici une série de grains de café noir ou blanc :

blanc blanc noir noir blanc blanc noir noir

Et les règles de réécriture suivantes :

noir blanc	→	noir	(r1)
blanc noir	→	noir	(r2)
noir noir	→	blanc	(r3)

Partant de la situation de départ, on va appliquer les règles de réécriture jusqu'à arriver à une situation terminale où plus aucune règle ne s'applique. Cette situation terminale est appelée en **forme normale**.

Exemple de transformation

blanc blanc noir <u>noir blanc</u> blanc noir noir	(r1)
blanc blanc <u>noir noir</u> blanc noir noir	(r3)
blanc blanc blanc <u>blanc noir</u> noir	(r2)
blanc blanc <u>blanc noir</u> noir	(r2)
blanc <u>blanc noir</u> noir	(r2)
<u>blanc noir</u> noir	(r2)
<u>noir noir</u>	(r3)
blanc	forme normale

Dans notre exemple, à partir d'une même situation de départ on peut arriver à une forme normale différente suivant le choix d'application des règles de réécritures.

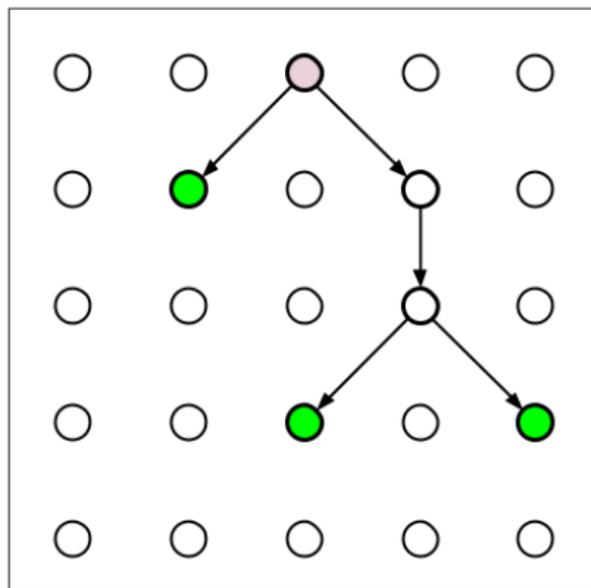
Deuxième exemple de transformation

blanc blanc <u>noir noir</u> blanc blanc noir noir	(r3)
blanc blanc blanc blanc blanc <u>noir noir</u>	(r3)
blanc blanc blanc blanc blanc blanc	forme normale

Quand on peut, à partir d'une même situation de départ, arriver à des formes normales différentes, on dit que *le système de réécriture n'est pas confluent*.

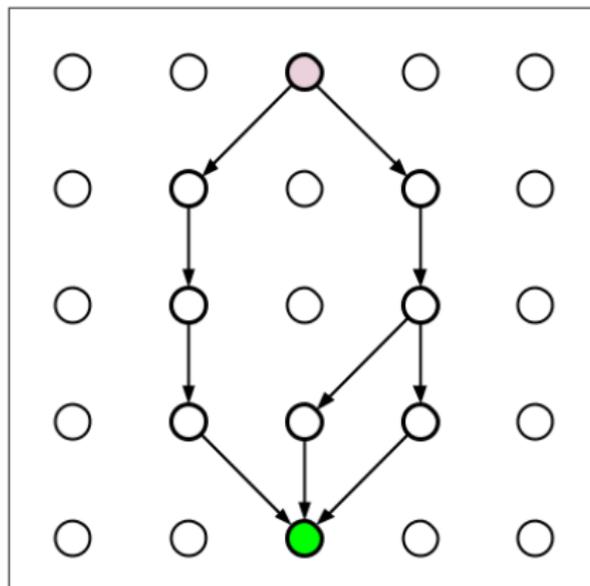
Système de réécriture

Système non-confluent. A partir d'un même point de départ plusieurs formes normales différentes peuvent être atteintes. L'ordre d'application des règles conditionne le résultat.



Système de réécriture

Système confluent. Un système de réécriture est *confluent* si l'on abouti toujours à la même forme normale quelque soit l'ordre d'application des règles de réécriture. Il représente un *calcul* et la forme normale est la *valeur* de l'expression de départ.



Les systèmes de réécriture sont par exemple utilisés en musique.

Paris, France, via la direction algébrique des séquences d'accords, Sébastien DUBOIS, Sébastien DUBOIS, Sébastien DUBOIS

Sur la structure algébrique des séquences d'accords de jazz

Sebastien DUBOIS
10000 Paris
sebastien.dubois@orange.fr

Résumé
Dans le cadre du projet d'un livre intitulé "Les Structures Algébriques des Séquences d'Accords de Jazz", nous nous intéressons à la notion de règle de réécriture, permettant de faire des variables de structure les termes de séquences d'accords de jazz. Nous discutons de comment l'écriture de règles de réécriture peut être utilisée pour caractériser des séquences d'accords "raisonnables". Nous discutons des applications musicales des règles qui produisent l'écriture de séquences de progressions de jazz. Enfin, nous présentons quelques problèmes mathématiques liés à cela.

1. De la forme ouverte à l'événement actif

La forme ouverte est la forme la plus simple de la forme "ouverte" introduite par L. van der Waerden dans son livre "The Algebraic Theory of Semigroups" (1940) et qui est la forme la plus simple de la forme "ouverte" introduite par L. van der Waerden dans son livre "The Algebraic Theory of Semigroups" (1940).

La forme ouverte est la forme la plus simple de la forme "ouverte" introduite par L. van der Waerden dans son livre "The Algebraic Theory of Semigroups" (1940) et qui est la forme la plus simple de la forme "ouverte" introduite par L. van der Waerden dans son livre "The Algebraic Theory of Semigroups" (1940).

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à une dimension de réécriture liée à la structure algébrique des séquences d'accords de jazz. On s'est intéressé à la notion de règle de réécriture, permettant de faire des variables de structure les termes de séquences d'accords de jazz. Nous discutons de comment l'écriture de règles de réécriture peut être utilisée pour caractériser des séquences d'accords "raisonnables". Nous discutons des applications musicales des règles qui produisent l'écriture de séquences de progressions de jazz. Enfin, nous présentons quelques problèmes mathématiques liés à cela.

Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à une dimension de réécriture liée à la structure algébrique des séquences d'accords de jazz. On s'est intéressé à la notion de règle de réécriture, permettant de faire des variables de structure les termes de séquences d'accords de jazz. Nous discutons de comment l'écriture de règles de réécriture peut être utilisée pour caractériser des séquences d'accords "raisonnables". Nous discutons des applications musicales des règles qui produisent l'écriture de séquences de progressions de jazz. Enfin, nous présentons quelques problèmes mathématiques liés à cela.

L'article "*Sur la structure algébrique des séquences d'accords de Jazz*" (Pachet, JIM 1998) propose plusieurs règles de réécriture pour le Jazz :

- C7 → F#7 (subst. au triton)
- C → G7 / C (prép. par septième)
- G7 → Dmin7 / G7 (prép. par min7)

Les systèmes de réécriture sont par exemple utilisés en musique.

A Term Rewriting based Structural Theory of Rhythm Notation

Research report -- ANR-13-2502-0004-01

Florent Jacquemard¹, Pierre Donat-Bouillud², and Jean Bresson¹

¹ CNRS UMR 8188 CITERE-ETAC and IRISA, Paris, France

² IIR, Bordeaux, Bordeaux, France

This report is the extended version of a paper presented at the International Conference on Mathematics and Computation in Music -- *MCM 2014*.

Abstract. We present a new formal symbolic representation of rhythm notation suitable for processing with generic algorithmic theoretical tools such as term rewriting systems or term algebras. This new process or operational theory, defined as a set of rewrite rules for considering three representations. This theory is completed in the sense that from a given rhythm notation, the rules search to generate all derivations of equivalent notations. It can be used to explore the space of being computability over notations themselves, one can extract the search space according to various parameters including \mathcal{A} notes or other more defined notation constructs.

Introduction

Term Rewriting Systems (TRS) [1] are well established formalisms for non-terminating transformation and rewriting. While added theoretical foundations, they are used in a wide range of applications, to name a few: non-terminating recursive function processing, foundations of Web data, etc. TRSs parties to various transformations to cross by the replacement of patterns, as defined by certain equations called rewrite rules. They are classical models for symbolic computation, used for rule-based modeling, simulation and verification of complex systems or software (see e.g. the language EBNF and Maude²). The *λ*-calculus [2] (or *λ*-TRS) [3] are finite-term rewriting systems which permit to characterize specific types of non-terminating data (recursive term languages). They are often used in conjunction with TRSs, writing or *flow* in the explanation of sets of rules composed by rewriting.

It is also common to use them to represent hierarchical structures in symbolic terms (see [10] for a survey). For instance, the CTM [11] was used to analyze music notation in musical pieces. There are also a structural representation of rhythms, where durations are expressed as a hierarchy of subdivisions. Computer-aided composition (CAC) encompasses such as *Handwerk* and *OpenMusic* [12]. One structure called *algebra tree* [13] for representing and processing rhythms [2]. Such hierarchical, semantic oriented approach (see also [14]) is complementary to the performance-oriented formalism corresponding to the MIDI notation system and allows to model complex music systems. It also provides some structural representations of data that could interact formally with *Maude* [15] or *Goal* [16], where durations are expressed with longer rules. As high-level structural representations, computer-aided composition and processing of rhythms in the *flexible domain* (see for instance [17]), and various other structural notations on duration expressions. In this paper, we propose a new symbolic representation suitable for definition of sets of rewriting rules (i.e. oriented equations) generating rhythms, while allowing simplification of notation. This representation includes CAC rhythms structures with formal non-terminating operations, and enables a number of new simplifications and applications in both domains. In particular, rewriting rules can be seen as an extension (instead of *algebra trees*, which can be applied to rewriting or operations) towards to represent other data structures or notations.

After some preliminary definitions in Section 1, we introduce our new representations of rhythms in Section 2. Section 3 presents the rewriting rules proposed based on this representation, and Section 4 finally makes some properties of this general representation framework.

¹http://www.irisa.fr

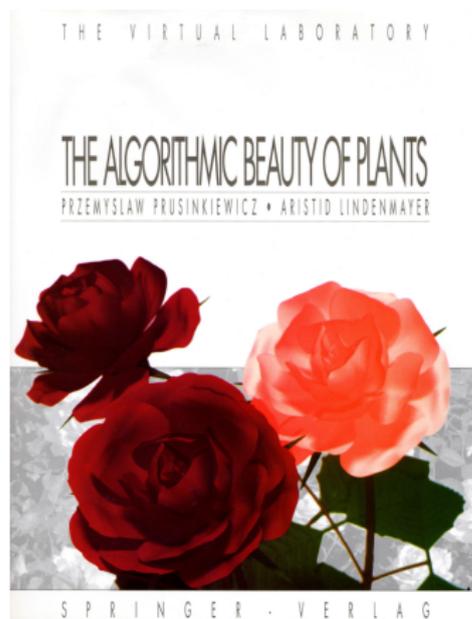
²http://cristin.inria.fr

L'article "A Term Rewriting based Structural Theory of Rhythm Notation" (Florent Jacquemard, Pierre Donat-Bouillud et Jean Bresson) propose l'utilisation de règles de réécriture pour la notation de rythmes complexes.

Système de réécriture



Une utilisation spectaculaire des systèmes de réécriture (dans une variante appelée *système de Lyndenmayer* ou *L-system*) est la modélisation de la croissance des plantes.



L'un des meilleurs spécialistes se trouve au Canada : Przemyslaw Prusinkiewicz. Il dirige le *Biological Modeling and Visualization research group* à l'université de Calgary
<http://algorithmicbotany.org>.

Système de réécriture

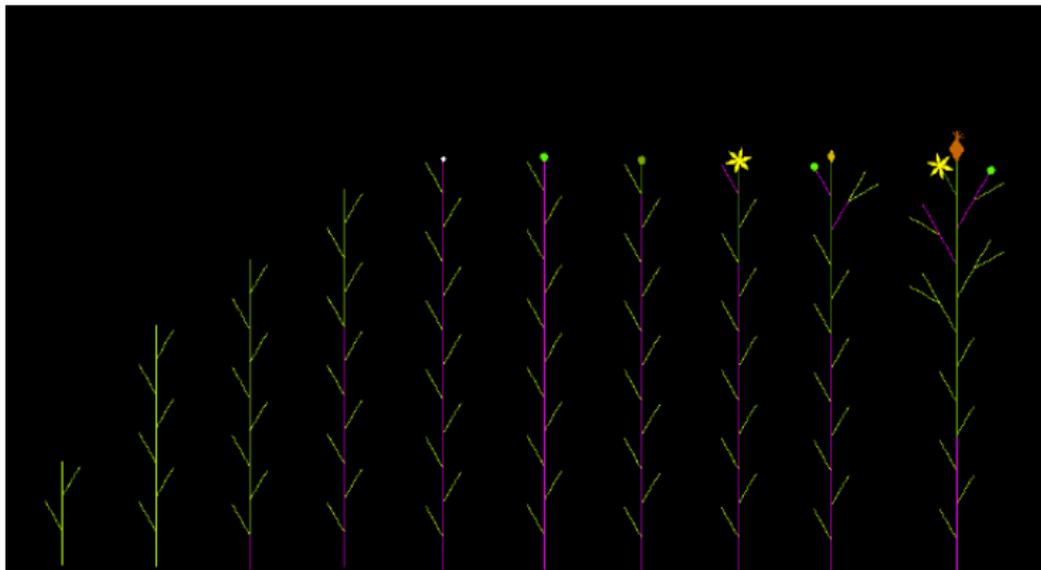


Modélisation de Mycelis muralis : le code.

```
#include K          /* flower shape specification */
#consider M S T V

 $\omega$  : I(20)FA(0)
p1 : S < A(t) :*    → TV K
p2 : V < A(t) :*    → TV K
p3 :     A(t) :t>0  → A(t-1)
p4 :     A(t) :t=0  → M[+(30)G]F/(180)A(2)
p5 : S < M      :*   → S
p6 :     S > T :*   → T
p7 : T < G      :*   → FA(2)
p8 : V < M      :*   → S
p9 :     T > V :*   → W
p10: W         :*   → V
p11:     I(t) :t>0  → I(t-1)
p12:     I(t) :t=0  → S
```

Modélisation de *Mycelis muralis* : premières itérations.



Modélisation de *Mycelis muralis* : itérations suivantes.

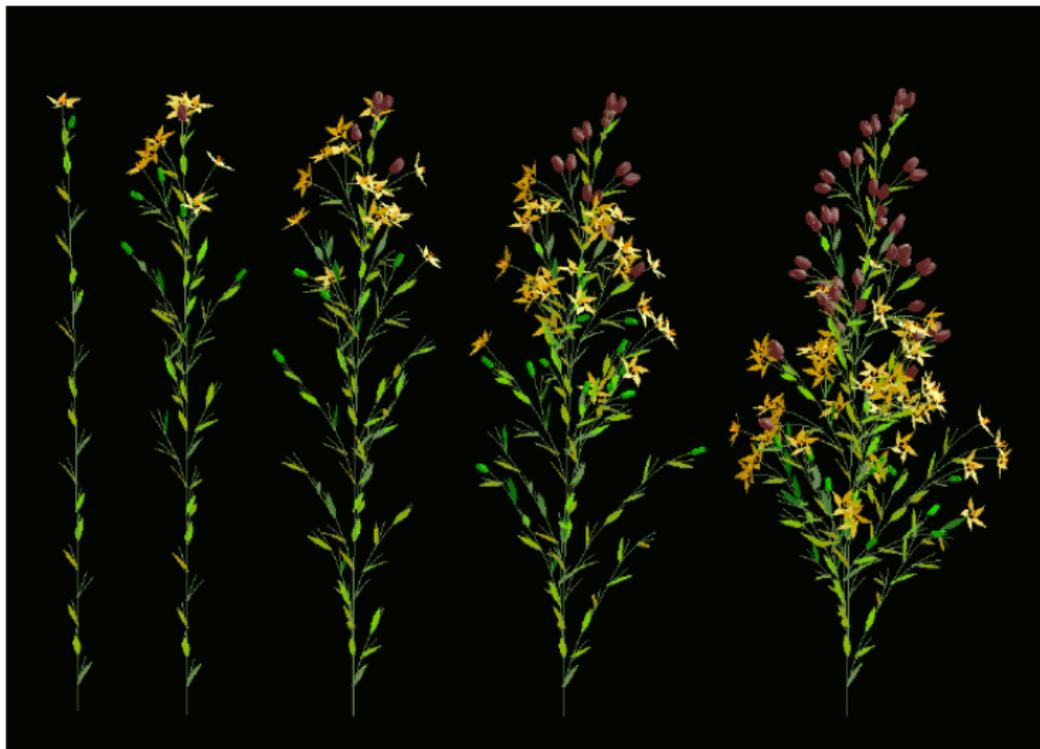


Modélisation de *Mycelis muralis* : itérations finales.

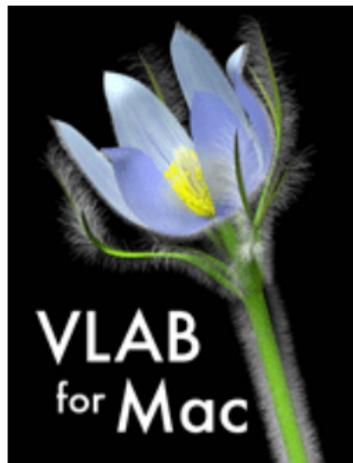


Système de réécriture

Modélisation de *Mycelis muralis* : modèle 3D.



Démonstration VLAB for Mac.



Lambda-Calcul



- Le lambda-calcul a été inventé à Princeton par Alonzo Church dans les années 30.
- C'est au départ une théorie qui vise à re-fonder les mathématiques sur la notion de fonction plutôt que d'ensemble. Mais cette tentative échoue pour cause de paradoxes.
- Le lambda-calcul que l'on connaît aujourd'hui est une théorie axiomatique de la notion de fonction que l'on peut voir comme un **langage de programmation fonctionnel réduit à son essence**.
- Alonzo Church "The calculi of lambda conversion", Princeton University Press, 1941.

Le Lambda-Calcul (λ -Calcul) repose sur deux concepts de base :

- L'abstraction, notée $\lambda x.e$, qui correspond à la définition de fonction
- et l'application, notée $(e_1 e_2)$, qui correspond à l'appel de la fonction e_1 en lui passant en paramètre e_2 .
- à cela il faut ajouter une infinité de symboles : x, y, z, \dots
- et une règle de réécriture : la β -réduction :

$$(\lambda x.e_1 e_2) \rightarrow_{\beta} e_1[x := e_2]$$

Exemple : bulletin météo

- On va utiliser comme symboles des mots comme : aujourd'hui, demain, il, fera, beau, chaud, etc.
- Exemple d'expression en forme normale :

$(((\text{aujourd'hui il fera}) \text{ beau})$

- La même sans toutes les parenthèses :

$(\text{aujourd'hui il fera beau})$

- Exemple d'abstraction en rendant variable *aujourd'hui* :

$\lambda \text{aujourd'hui} . (\text{aujourd'hui il fera beau})$

Exemple : bulletin météo

- Exemple d'application :

$(\lambda \text{aujourd'hui} . (\text{aujourd'hui il fera beau}) \text{ demain})$

- Exemple de β -reduction :

$$\frac{(\lambda \text{aujourd'hui} . (\text{aujourd'hui il fera beau}) \text{ demain})}{(\text{demain il fera beau})} \quad (\beta)$$

Exemple : bulletin météo

- générateur de bulletins météo à deux variables

$\lambda \text{aujourd'hui}.\lambda \text{beau}.\text{(aujourd'hui il fera beau)}$

- et son application à demain et chaud

$$\frac{(\lambda \text{aujourd'hui}.\lambda \text{beau}.\text{(aujourd'hui il fera beau)} \text{ demain chaud})}{(\lambda \text{beau}.\text{(demain il fera beau)} \text{ chaud})} \quad (\beta)$$
$$\frac{\quad}{\text{(demain il fera chaud)}} \quad (\beta)$$

En fait le λ -calcul ne comporte aucune des notions habituelles de l'informatique :

- ni les nombres
- ni les booléens
- ni les structures de données
- ni les structures de contrôle
- ni même la récursivité

Toutes ces notions peuvent être construites à partir des seules notions d'abstraction et d'application !

Représentation des nombres

$$0 = \lambda f. \lambda x. x$$

$$1 = \lambda f. \lambda x. (f x)$$

$$2 = \lambda f. \lambda x. (f (f x))$$

...

$$\text{succ} = \lambda n. \lambda f. \lambda x. (f (n f x))$$

$$\text{plus} = \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. (m f (n f x))$$

$$\text{mult} = \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. (m (n f) x)$$

$$\text{exp} = \lambda m. \lambda n. \lambda f. \lambda x. (n m f x)$$

Représentation de la récursivité

$$Y = \lambda b.(\lambda v.(b (v v)) \lambda v.(b (v v)))$$

Malgré sa simplicité le λ -calcul est d'une importance capitale car il fonde la notion de calculabilité.

- Thèse de Church : toute fonction effectivement calculable peut être exprimée en λ -calcul
- Equivalence entre λ -calcul, machines de Turing, fonctions récursives.
- Influence considérable sur les langages de programmation et la théorie des LP
- Impact philosophique, vision "fonctionnelle" des choses.

Le lambda-calcul est un langage de programmation réduit à son essence. Cette essence peut servir de base à de nouveaux langages de programmation comme le montrent les deux exemples suivants :

- Graphic-calculus
- Elody

Logique Combinatoire



- La logique combinatoire a été inventée par Moses Schönfinkel en 1920 et publiée en 1924 dans un article intitulé "On the building blocks of mathematical logic".
- L'idée de Schönfinkel était de voir si l'on pouvait se passer de la notion de variable, qu'il considérait comme un concept auxiliaire.

Définition avec variable

Voici un exemple de définition de fonction utilisant des variables :

$$\text{dist}(x_0, y_0, x_1, y_1) = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

Substitution

Au moment de l'utilisation de la fonction $\text{dist}(2, 20, 7, 1)$ on remplace dans sa définition les variables x_0, x_1, y_0, y_1 par leurs valeurs respectives 2, 20, 7, 1.

$$\begin{aligned} \text{dist}(2, 20, 7, 1) &= \sqrt{(2 - 7)^2 + (20 - 1)^2} \\ &= \sqrt{-5^2 + 19^2} \\ &= 19.65 \end{aligned}$$

Moses Schönfinkel a montré que l'on pouvait se passer de fonctions à plusieurs variables et se contenter de fonctions à une variable !

Curryfication

Une fonction à plusieurs variables pouvait être représentée par un emboîtement de fonctions à une variable (ce que l'on appelle aujourd'hui la curryfication)

$$F(x,y) \rightarrow (F(x))(y)$$

et de fait on peut se passer des parenthèses :

$$\begin{aligned}(F(x))(y) &\rightarrow (F\ x)\ y \\ (F\ x)\ y &\rightarrow F\ x\ y\end{aligned}$$

Exemple de curryfication

$\text{transposer}(12, S) \rightarrow \text{transposer } 12 \ S$
 $\text{transposer } 12 \rightarrow \text{octavier}$

Parenthèses implicites

$\text{transposer } 12 \ S \leftrightarrow ((\text{transposer } 12) \ S)$

Mais surtout Moses Shönfinkel a montré que l'on pouvait totalement se passer de variables. Il a proposé pour cela un jeu initial de 5 combinateurs :

B, C, S, K et I

$$B x y z \rightarrow x (y z)$$

$$C x y z \rightarrow x z y$$

$$S x y z \rightarrow (x z) (y z)$$

$$K x y \rightarrow x$$

$$I x \rightarrow x$$

Logique combinatoire



Il a ensuite montré que l'on pouvait se contenter de 3 combinateurs

S K et I

$$S x y z \rightarrow (x z) (y z) \quad (c1)$$

$$K x y \rightarrow x \quad (c2)$$

$$I x \rightarrow x \quad (c3)$$

et même que I n'était pas nécessaire !

$$I = (S K K)$$

Démonstration

$$S K K x \quad (c1)$$

$$K x (K x) \quad (c2)$$

$$x \quad (\text{arrêt})$$

En résumé Moses Schönfinkel a montré que l'on pouvait exprimer tout calcul (et donc toute l'informatique qui n'existait pas encore) à l'aide de deux combinateurs

S et K

$$S \ x \ y \ z \ \rightarrow \ (x \ z) \ (y \ z) \quad (c1)$$

$$K \ x \ y \ \rightarrow \ x \quad (c2)$$

On ne peut pas faire plus concis !

Pour montrer que la logique combinatoire est aussi expressive que le lambda-calcul il suffit de montrer comment convertir toute expression du lambda-calcul en logique combinatoire.

Trois règles de réécriture suffisent !

$$\begin{aligned}\lambda x.x &\rightarrow I && (r1) \\ \lambda x.c &\rightarrow (K c) && (r2) \\ \lambda x.(e_1 e_2) &\rightarrow (S (\lambda x.e_1) (\lambda x.e_2)) && (r3)\end{aligned}$$

Voici un exemple de conversion d'une expression du λ -calcul en logique combinatoire en appliquant les règles de réécriture précédentes.

Conversion de $\lambda x.\lambda y.y$

$$\lambda x.\lambda y.y \quad (r1)$$

$$\frac{\lambda x.I}{\lambda x.\lambda y.y} \quad (r2)$$

$$K I \quad (\text{arrêt})$$

Vérification

$$\frac{K I x y}{\lambda x.\lambda y.y} \quad (c2)$$

$$\frac{I y}{y} \quad (c3)$$

Utilisations de la logique combinatoire :

- Implementation de langages fonctionnels
- Machine S K de Turner
- langages FP (Backus, 1977)
- Faust (Orlarey, Fober, Letz 2002)

Conclusion

Au fond, que reste-t-il ?



Quand on a enlevé tout le superflu il ne reste plus grand chose !

- la plupart des notions : nombres, booléens, structures de données, structures de contrôle ont disparu ;
- et même la notion de variable et de récursivité ;
- il ne reste que la notion de **fonction**.

L'essence d'un langage de programmation c'est de permettre de décrire des fonctions. Tout le reste peut se construire par dessus.

Can Programming Be Liberated from the von Neumann Style? A Functional Style and Its Algebra of Programs



"Conventional programming languages are growing ever more enormous, but not stronger. Inherent defects at the most basic level cause them to be both fat and weak :. . ."